Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $B = A + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = A$.

c) Fie $A_1(a, f(a))$, $A_2(b, f(b))$ și $A_3(c, f(c))$ cele trei puncte, cu $a \le b \le c$.

$S[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2}|B| \overset{a)}{=} \frac{(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)}{2}$.

Cel puțin două dintre cele trei numere a, b, c au aceeași paritate, deci cel puțin unul dintre numerele $b-a, c-b, c-a$ este par. Rezultăcă $S[A_1A_2A_3] \in \mathbb{N}$. Se arată că $f(a)$, $f(b)$ și $f(c)$ sunt multipli de 3, deci B este divizibil cu 3, adică $S[A_1A_2A_3]$ este divizibilă cu 3.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Se arată că $\forall\, X(a), X(b) \in H$, cu $a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}$, $a + b - 10ab \ne \frac{1}{10}$, deci $X(a)X(b) \in H$.

c) Pentru $X = X(a) \in G$, $X^2 = I_2 \iff X\left(2a - 10a^2\right) = X(0)$.

Se obțin soluțiile $X_1 = I_2$ și $X_2 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.